الجامعة السورية الخاصة

كلية الصيدلة

محاضرات في الرياضيات – الدكتور عماد فتاش

تمهيد

***المجموعات والرموز المنطقية**
العمليات على المجموعات
التطبيقات على المجموعات
مجموعات الأعداد
التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية
المجالات ، القيمة المطلقة
***الاستقراء الرياضي**
إحداثيات نقطة في المستوي
مجموعة الأعداد العقدية

المجموعات والرموز المنطقية

نتناول في شتى مجالات النشاط الإنساني أشياء مختلفة تربط فيما بينها خاصية أو صفة عامة مشتركة. فمثلاً، عندما نتحدث عن طلاب جامعة دمشق فإننا نعني بذلك الطلاب الذين يتصفون بصفة مميزة هي الانتساب لجامعة دمشق. وعندما نتحدث عن نقاط محيط دائرة ما، فإننا نعني بذلك نقاطاً من المستوي تحقق خاصية مميزة، وهي أن هذه النقاط تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة.

المجموعة

المجموعة هي تجميع أشياء، يسمى كل منها عنصر المجموعة.

يُعد مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات ولكن يستحيل إعطاء مفهوم المجموعة تعريفاً دقيقاً. وكلمة مجموعة مرادفة للكلمات مجمل، جملة، صف، نظام...

نرمز للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة $A\ ,\ B\ ,\ C,\ ...$ ، ولعناصرها بالأحرف اللاتينية الصغيرة $a\ ,\ b\ ,\ c,\ ...$. إذا كان العنصر a أحد عناصر المجموعة A، فإننا نقول إن العنصر a ينتمي للمجموعة A، ونرمز لذلك بالرمز $a \in A$. وإذا كان العنصر a لا ينتمي للمجموعة A، فإننا نرمز بالرمز $a \notin A$.

تُعطى المجموعة بقائمة لجميع عناصرها أو بدلالة صفة مشتركة بين عناصرها. فإذا كانت عناصر المجموعة A هي $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d$، فإننا نكتب

$$A=\{\ a,b,c,d\ \}$$

إذا كانت جميع عناصر المجموعة A تتصف بصفة مشتركة $p(x)$، فإننا نكتب

$A=\{x$: x يحقق الصفة $p(x)\}$

المجموعة الخالية: إذا كانت المجموعة لا تحوي أي عنصر، فإننا نقول إن المجموعة خالية ونرمز لها ϕ.

فمثلاً، مجموعة الأعداد التي تحقق المعادلة $x^2+1=0$ هي مجموعة خالية.

تصنف المجموعات في الطبيعة صنفين: مجموعات منتهية ومجموعات غير منتهية.

فمجموعة طلاب الجامعة أو مجموعة جذور المعادلة من الدرجة الثانية هي مجموعات منتهية، أما مجموعة الأعداد الصحيحة أو مجموعة المستقيمات المارة من نقطة ثابتة فهي مجموعات غير منتهية.

سعة(رئيسي) مجموعة: إذا كانت المجموعة A منتهية فإن عدد عناصرها يسمى سعة (قدرة) المجموعة A، ونرمز لهذا العدد بالرمز $|A|$.

تساوي مجموعتين: نقول عن المجموعتين A وB إنهما متساويتان ونكتب $A=B$، إذا كان كل عنصر من عناصر A هو عنصر من عناصر B، وبالعكس، كل عنصر من عناصر B هو عنصر من عناصر A.

فمثلاً، مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من العدد 4، ومجموعة جذور المعادلة $x^3-6x^2+11x-6=0$ متساويتان، أي

$$\{\, x\in \mathrm{N} \;:\; x<4 \,\}=\{\, x \;:\; x^3-6x^2+11x-6=0 \,\}$$

المجموعة الجزئية: نقول عن المجموعة غير الخالية A إنها مجموعة جزئية من المجموعة غير الخالية B، إذا كان كل عنصر من عناصر A هو عنصر من عناصر B، ونكتب عندئذٍ $A\subseteq B$، وتقرأ A محتواة في B أو B تحوي A.

إذا كان $A\subseteq B$ و $A\neq B$ ، فإن A محتواه تماما في B، ونكتب $A\subset B$.

الرموز المنطقية

عند صياغة مبرهنة أو إعطاء البرهان نضطر لتكرار بعض الكلمات أو العبارات، ولكي نختصر الكتابة نستخدم بعض الرموز المنطقية :

الرمز $\wedge$ يُقرأ "و"، والرمز $\vee$ يُقرأ "أو".

الرمز $\forall$ يُقرأ: "مهما يكن" أو "أياً كان" أو "كل" أو "أي". فالعبارة " مهما يكن العنصر x من المجموعة M " تكتب اختصاراً $\forall x\in M$.

الرمز $\exists$ يُقرأ: "يوجد". فالعبارة " يوجد عنصر x من المجموعة M " تكتب اختصاراً $\exists x\in M$.

الرمز $\Rightarrow$ يُقرأ: "يؤدي" أو" ينتج". فالعبارة " تنتج الحقيقة B من الحقيقة A " تكتب اختصاراً $A\Rightarrow B$.

الرمز $\Leftrightarrow$ يُقرأ : "يكافئ" أو "إذا وفقط إذا " أو "يلزم ويكفي". وهو يعني تكافؤ الحقيقتين على يمين وعلى يسار هذا الرمز. فالعبارة " في أي مثلث abc يكون الضلعان $\overline{ab}$ و $\overline{ac}$ متساويين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان $\hat{b}$ و $\hat{c}$ متساويتين، وتكتب اختصاراً

$$\forall \overset{\Delta}{abc} \;:\; \overline{ab}=\overline{ac} \quad\Leftrightarrow\quad \hat{b}=\hat{c}$$

إذا كانت $x_1,x_2,\ldots\ ,x_n$ أعداداً ما، فإن الكتابة $x=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$[1] تعني أن العدد x هو أكبر الأعداد $x_1,x_2,\ldots\ ,x_n$.

وتعني الكتابة $x=\min\{x_1,x_2,\ldots\ ,x_n\}$[2] أن العدد x هو أصغر الأعداد $x_1,x_2,\ldots\ ,x_n$.

العمليات على المجموعات

نرمز بـ U للمجموعة الكلية أو المجموعة الشاملة، وهي مجموعة جميع المجموعات التي نتعامل معها، أي أن هذا المفهوم هو مفهوم نسبي، حيث تختلف هذه المجموعات تبعاً للمواضيع المدروسة.

فمثلاً، في الهندسة المستوية تكون المجموعة الشاملة هي مجموعة نقاط المستوي. بينما في الهندسة الفراغية تكون مجموعة نقاط الفراغ.

اتحاد مجموعتين: اتحاد أو اجتماع مجموعتين A و B هو المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي لإحدى المجموعتين A أو B، ونرمز للاتحاد بالرمز $A \bigcup B$ ويوصف كما يلي:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \ \vee x \in B \}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن $A \bigcup A = A$ و $A \bigcup \phi = A$ و $A \bigcup U = U$.

تقاطع مجموعتين: تقاطع مجموعتين A و B هو المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي لإحدى للمجموعتين A و Bأو لكلتاهما، ونرمز للتقاطع بالرمز $A \bigcap B$ ويوصف كما يلي:

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \ \wedge x \in B \}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن $A \bigcap A = A$ و $A \bigcap \phi = \phi$ و $A \bigcap U = A$ و $A \bigcap B = B \bigcap A$.

تقبل عمليتا الاتحاد والتقاطع، التوزيع إحداهما على الأخرى:

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$$
$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$$

فرق مجموعتين: فرق مجموعتين A و B (المجموعة $A \setminus B$، وتُقرأ A فرق B)، هو المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي للمجموعة A ولا تنتمي للمجموعة B، وتوصف كما يلي:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge x \notin B \}$$

كما هو واضح، فإن $A \setminus B \neq B \setminus A$، أي أن عملية الفرق غير تبديلية.

متممة مجموعة: نسمي الفرق $U \setminus A$ المجموعة المتممة للمجموعة A، ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{ x : x \notin A\}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن $A \bigcup \overline{A} = U$ و $A \bigcap \overline{A} = \phi$ و $\overline{\overline{A}} = A$ و $\overline{\phi} = U$ و $\overline{U} = \phi$.

الجداء الديكارتي لمجموعتين:

نسمي زوج العناصر (x, y)، حيث $x \in A$ و $y \in B$، زوجاً مرتباً إذا كان ترتيب كتابة العنصرين x و y محدداً. ونسمي عندئذ عنصري الزوج (x, y) إحداثيي هذا الزوج.

يكون $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$، إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$.

الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B هو المجموعة $A \times B$ المؤلفة من جميع الأزواج المرتبة (x, y) الممكنة:

$$A \times B = \{(x,y) \ : \ x \in A \ \ \wedge \ \ y \in B \ \}$$

التطبيقات على المجموعات

لتكن A و B مجموعتين ما و f قانوناً أو قاعدة يتم وفقه مُقابلة كل عنصر a من المجموعة A بعنصر وحيد b من المجموعة B. نقول عندئذٍ، إن f تطبيق من المجموعة A إلى المجموعة B، ونرمز لذلك بالرمز $f \ : A \to B$.

نسمي العنصر $b \in B$ المقابل للعنصر $a \in A$ وفق التطبيق f صورة العنصر a وفق هذا التطبيق، ونرمز لذلك بالرمز $f(a) = b$.

يمكن، باستخدام الرموز، كتابة هذا التعريف كما يلي:

$$f \ : A \to B \ \Leftrightarrow$$

$$\{\forall a\in A\ ,\ \exists\, b\in B : b=f(a) \wedge if\ \ \exists\, c\in B : c=f(a) \Rightarrow\ c=a\ \}$$

نسمي مجموعة صور جميع عناصر المجموعة A وفق التطبيق f، صورة المجموعة A ونرمز لها $f(A)$:

$$f(A)=\{\ f(a)\ :\ a\in A\}\subseteq B$$

التطبيق التقابل: نقول عن التطبيق $f\ :\ A\to B$ إنه تقابل واحد لواحد واختصاراً تقابل، إذا كان كل عنصر $b\in B$ هو صورة لعنصر وحيد فقط $a\in A$، ، أي

$$f \text{ تقابل } \Leftrightarrow \begin{cases}\forall\, b\in B\ ,\ \ \exists a\in A\ \ :\ \ \ b=f(a)\\ \forall\, a_1,a_2\in A : a_1\neq a_2\ \Rightarrow\ \ f(a_1)\neq f(a_2)\end{cases}$$

إذا كان التطبيق $f\ :\ A\to B$ تقابلاً، فإنه يمكن تعريف التطبيق العكسي f^{-1} .

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow\\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \end{array}$$

ونعبّر عن هذا التقابل الواحدي بالعلاقة: $f(n)=2n$.

مجموعات الأعداد

<u>مجموعة الأعداد الطبيعية</u> N : هي المجموعة

$$N=\{1,2,3,\ldots\ \}$$

<u>مجموعة الأعداد الصحيحة</u> Z : هي المجموعة

$$\mathsf{Z}=\{\ \ \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\ \ \}$$

وتحقق الخواص التالية:

1. $\mathsf{N}\subset\mathsf{Z}$ ؛
2. مجموعة الأعداد الصحيحة Z معدودة وغير منتهية ومرتبة؛
3. تعرّف في المجموعة Z عمليات الجمع والطرح والضرب أي أن حاصل جمع وطرح وضرب عددين صحيحين هو عدد صحيح؛

بينما لا تعرف في Z عملية القسمة، لأن حاصل قسمة عددين صحيحين ليس بالضرورة عدداً صحيحاً.

<u>مجموعة الأعداد العادية</u> (النسبية أو المنطّقة) Q : هي المجموعة

$$\mathsf{Q}=\{\ \tfrac{p}{n}\ \ :\ p\in\mathsf{Z}\ \ \wedge\ \ n\in\mathsf{N}\ \}$$

وهي تحقق الخواص التالية:

1. $\mathsf{N}\subset\mathsf{Z}\subset\mathsf{Q}$ ؛
2. مجموعة الأعداد العادية Q معدودة وغير منتهية ومرتبة؛
3. يمكن كتابة أي عدد عادي ككسر عشري منته أو غير منته ولكن دوري؛
4. المجموعة Q كثيفة. بالفعل، إذا كان $q_1,q_2\in\mathsf{Q}$ بحيث $q_1<q_2$، فإنه يوجد عدد عادي $q=\frac{q_1+q_2}{2}$ بحيث يكون $q_1<q<q_2$ ؛
5. خاصة أرخميدس[1]:

$$\forall\ q_1\ ,\ q_2\in\mathsf{Q}\ \ :\ \ q_1<q_2\ ;\ \ \exists n\in\mathsf{N}\ :\ nq_1>q_2$$

---

[1] أرخميدس : (287-212 قبل الميلاد) عالم رياضيات وميكانيك يوناني.

6. تُعرَّف في Q العمليات الحسابية الأربع (عدا القسمة على صفر) وتحقق عمليتا الجمع والضرب الخاصة التجميعية والتبديلية. كما أن الضرب توزيعي على الجمع.

1.5.4 مجموعة الأعداد غير العادية (غير النسبية أو الصماء):

نسمي الأعداد التي لا يمكن أن يعبر عنها كحاصل قسمة عددين $\frac{p}{n}$، أعداداً غير عادية (غير نسبية أو صماء).

فمثلاً، الأعداد $\sqrt{2}$ و π و $\ln 3$ و $\sin 20^{\circ}$ هي أعداد صماء.

يمكن أن يُكتب أي عدد غير عادي ككسر عشري غير دوري لا نهائي.

مجموعة الأعداد الحقيقية P:

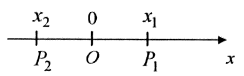
هي مجموعة الأعداد العادية وغير العادية. وهي تحقق معظم خواص مجموعة الأعداد العادية: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

إن مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة غير منتهية ومرتبة وتحقق خاصة أرخميدس. غير أنها ليست معدودة، كما هي حال مجموعة الأعداد العادية.

التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية

تُمثل الأعداد الحقيقية على محور يسمى محور الأعداد. وهو مستقيم لانهائي موجّه من اليسار إلى اليمين، ومحدد عليه نقطة ثابتة o (تسمى نقطة الأصل) وتقابل العدد 0، نعين على هذا المستقيم وحدة قياس لقياس الأطوال، فالنقطة التي تبعد عن نقطة الأصل إلى اليمين بوحدة قياس تقابل العدد 1 والنقطة التي تبعد عن نقطة الأصل إلى اليسار بوحدة قياس تقابل العدد -1. وغالباً ما يكون هذا المحور أفقياً. ويسمى محور الأعداد محوراً إحداثياً. ونرمز له بالرمز ox.

إذا كان x_1 عدداً موجباً، فإنه يُمثل بالنقطة P_1، الواقعة على يمين نقطة الأصل وتبعد عنها بالمقدار x_1. وإذا كان العدد x_2 سالباً، فإنه يُمثل بالنقطة P_2، الواقعة على يسار نقطة الأصل وتبعد عنها بالمقدار $|x_2|$. وتُمثل النقطة o بالعدد 0، الشكل 1.4.



الشكل 1.4

واضح أن كل عدد حقيقي يُمثل بنقطة معينة على محور الأعداد. ويمثل العددان الحقيقيان المختلفان على محور الأعداد بنقطتين مختلفتين. وبالعكس فإن أي نقطة من محور الأعداد تُقابل عدداً حقيقياً وحيداً.

وعليه، فإن هناك تقابلاً بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومحور الأعداد. ويُعطي ذلك إمكانية استخدام مفهوم "العدد x" ومفهوم "النقطة x" بالمعنى نفسه.

كما يمكن تمثيل أي عدد عادي بنقطة على محور الأعداد، غير أنه لا يقابل كل نقطة من محور
الأعداد عدد عادي.

فمثلاً، النقطة التي تبعد عن نقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات) مسافة تساوي طول قطر مربع، طول ضلعه يساوي الواحد، لا يمكن أن تقابل أي عدد عادي. أي أنه لا يوجد عدد عادي مربعه يساوي 2.

وعليه، فإنه لا يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد العادية ومحور الأعداد.

المجالات