عند دراسة الدوال التابعة لمتغيّر حقيقي واحد، نتعرض لمجموعات جزئية من المجموعة $\mathbb{R}$، وهي مجالات مفتوحة أو نصف مفتوحة أو مغلقة. فإذا كان a و b عددين حقيقيين، بحيث $a < b$، فإن:

المجال المغلق الذي طرفاه a و b (القطعة المستقيمة) هو المجموعة:

$$[a;b] = \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ a \le x \le b\ \}$$

المجال نصف المغلق أو نصف المفتوح هو المجموعة:

$$[a;b[= \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ a \le x < b\ \} \quad \text{أو} \quad]a;b] = \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ a < x \le b\ \}$$

المجال المفتوح (الفترة) هو المجموعة:

$$]a;b[= \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ a < x < b\ \}$$

ويمكن أن يكون المجال غير محدود:

$$[a;\infty[= \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ a \le x < \infty\ \}$$
$$]a;\infty[= \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ a < x < \infty\ \}$$
$$]-\infty;b] = \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ -\infty < x \le b\ \}$$
$$]-\infty;b[= \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ -\infty < x < b\ \}$$
$$]-\infty;\infty[= \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ -\infty < x < \infty\ \} = \mathbb{R}$$

يقابل هذه المجالات قطع مستقيمة على المحور الإحداثي. ويقابل المجال $]-\infty;\infty[$ كامل المحور الإحداثي، لذا يسمى هذا المحور "المحور الحقيقي".

المجموعات العددية المحدودة

تعريف: نقول عن المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إنها محدودة من الأعلى (من الأدنى)، إذا وجد عدد M (m)، بحيث يكون

$$x \le M \quad (x \ge m) \quad ; \quad \forall x \in A$$

نسمي العدد M (m) في هذه الحالة، حداً أعلى (حداً أدنى) للمجموعة A أو راجحاً على A (أو قاصراً على A).

إذا كانت المجموعة محدودة من الأعلى ومن الأدنى فإنها تسمى محدودة.

فمثلاً، أي مجال محدود $[a;b]$ أو $[a;b[$ أو $]a;b]$ أو $]a;b[$ هو مجموعة محدودة. بينما المجال $[a;\infty[$ أو المجال $]a;\infty[$ هو مجموعة محدودة من الأدنى فقط، والمجال $]-\infty;b]$ أو المجال $]-\infty;b[$ هو مجموعة محدودة من الأعلى فقط. بينما المجال $]-\infty;\infty[$ هو مجموعة غير محدودة لا من الأعلى ولا من الأدنى.

القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي القيمة غير السالبة له، أي العدد x نفسه إذا كان $x \ge 0$، أو العدد $-x$ إذا كان $x < 0$. ونرمز لها بالرمز $|x|$، أي

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \ge 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

ينتج من هذا التعريف الخواص التالية :

1. $|x| \ge 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = |-x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $-|x| \le x \le |x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\forall x \in R$ · and $\forall a > 0$; $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x \in [-a : a]$

5. $|x + y| \le |x| + |y| \quad ; \ \forall x \ , \ y \in R$

6. $|x - y| \ge |x| - |y| \quad ; \ \forall x \ , \ y \in R$

ويمكن بسهولة التحقق من صحة العلاقات :

$$|x + y| \ge |x| - |y| \ ، \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \ ، \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ ; \ (y \ne 0) \ ،$$

$$|x^n| = |x|^n \ ; \ n \in \mathrm{N}$$

التفسير الهندسي للقيمة المطلقة: إن العدد $|x|$ يُمثّل المسافة بين نقطة الأصل o والنقطة التي تمثل العدد الحقيقي x، بغض النظر عما إذا كانت هذه النقطة تقع على يمين أو على يسار o. وبالمثل، فإن العدد $|b - a|$ يُمثّل المسافة بين النقطتين a و b على محور الأعداد.

الاستقراء الرياضي

تُعد طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي من طرائق البرهان الهامة، وتستخدم عادةً لإثبات صحة قضية ما (مساواة أو متراجحة) متعلقة بعدد طبيعي n. كإثبات مثلاً، أن مجموع أول n عدد طبيعي فردي يساوي n^2، مثال 1.10.

وتعتمد هذه الطريقة على التحقق من صحة القضية عندما $n = 1$ (أساس الاستقراء)، ومن ثم نفرض صحة القضية من أجل n، حيث $n > 1$، ونثبت صحتها من أجل $n + 1$. تكون عندئذٍ، القضية المعطاة صحيحة أياً يكن العدد n.

إذا كان المطلوب إثبات صحة علاقة من أجل $n \ge n_o$، فإن أساس الاستقراء يكون $n = n_o$.

مثال : أثبت صحة العلاقة

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \ \forall n \in \mathrm{N} \qquad (i)$$

الحل: العلاقة (i) صحيحة عندما $n = 1$ (أساس الاستقراء)، لأن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر يساوي الواحد.

نفرض أن العلاقة (i) صحيحة لأي $n > 1$، ونثبت صحتها من أجل $n + 1$، أي نثبت صحة

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (ii)$$

نعوض العلاقة (i) في الطرف الأيسر للعلاقة (ii):

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

وهو نفس الطرف الأيمن من العلاقة (ii).

ملاحظة: تفيد طريقة الاستقراء الرياضي في حساب مجموع عددٍ محدود من الأعداد.

مثال: احسب المجموع $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$.

الحل: واضح أن:

$$S_1 = 1 \ ، \ S_2 = 1 + 3 = 4 \ ، \ S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 \ ،$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \ ، \ldots$$

إذن، يمكن أن نتوقع أن يكون $S_n = n^2$.
نبرهن صحة هذه العلاقة بالاستقراء الرياضي:
هذه العلاقة صحيحة من أجل $n=1$، نفرض أنها صحيحة من أجل $n>1$، ونثبت صحتها من أجل $n+1$، أي نثبت صحة المساواة

$$S_{n+1} = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$$

بالفعل، بإضافة المقدار $2n+1$ إلى طرفي العلاقة المعطاة نجد:

$$S_{n+1} = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) =$$
$$= S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

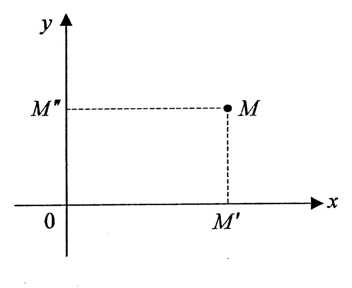
أي أن $S_{n+1} = (n+1)^2$.

إحداثيات نقطة في المستوي

نُعرّف إحداثيات نقطة، بأنها تلك المقادير التي تعين موضعاً وحيداً لهذه النقطة على مستقيم أو في المستوي أو في الفراغ. فإذا كانت النقطة M تقع على المحور الإحداثي ox، فيمكن تعيين موضعها بعددٍ وحيد هو إحداثي هذه النقطة x وتمثّل القيمة المطلقة له بُعد النقطة M عن نقطة الأصل. وإذا كان x موجباً، فإن النقطة M تقع على يمين نقطة الأصل، وإذا كان x سالباً، فإن النقطة M تقع على يسار نقطة الأصل. وإذا كانت النقطة تقع في المستوي، فإنه يتعين موضع وحيد لها بمعرفة عددين. ويكون ذلك بعدة طرائق، نعطي طريقتين منها: الطريقة الديكارتية والطريقة القطبية.

جملة الإحداثيات الديكارتية

لتكن o نقطة ثابتة من المستوي يمر منها محوران إحداثيان متعامدان ox و oy، أحدهما أفقي ox يسمى محور السينات أو محور الفواصل، والآخر شاقولي oy يسمى محور العينات أو محور التراتيب، وتُعطى على كلٍ منها واحدة قياس معينة. ونسمي النقطة الثابتة o نقطة الأصل أو مبدأ الإحداثيات، الشكل 1.5.
ونسمي المستوي عندئذٍ، مستوي الإحداثيين الديكارتيين واختصاراً المستوي الديكارتي.
يقسم المستقيمان الإحداثيان ox و oy المستوي الديكارتي لأربعة أجزاء (أرباع).



الشكل 1.5

لتعيين إحداثيات نقطة M في المستوي الديكارتي، نرسم مستقيمين يمران من M يوازي الأول محور الفواصل والآخر محور التراتيب، فيقطعان المحاور الإحداثية في النقطتين M'

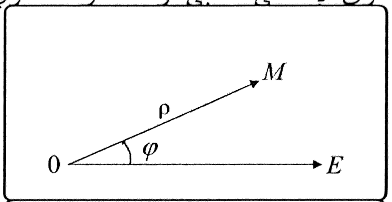
و M'' على الترتيب، الشكل 1.5. ليكن x إحداثي النقطة M'، وy إحداثي النقطة M''. وهكذا، يتعين موضع وحيد للنقطة M بمعرفة المقدارين (العددين) x وy. نسمي العددين x وy الإحداثيين الديكارتيين للنقطة M، ونكتب $M(x,y)$.
كما هو واضح، فإن القيم x وy يمكن أن تأخذ أية قيمة، أي

$$-\infty < x < \infty \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

وبالعكس، يمكن تحديد موضع النقطة M في المستوي الديكارتي بمعرفة عددين x و y، تُمثل القيمة المطلقة للعدد الأول بُعد النقطة M عن محور التراتيب، وتُمثل القيمة المطلقة للعدد الثاني بُعد النقطة M عن محور الفواصل.
إذا كان العددان x وy موجبين، فإن النقطة M تقع في الربع الأول أو الربع الموجب من المستوي الديكارتي. وإذا كان العدد x سالباً والعدد y موجباً، فإن النقطة M تقع في الربع الثاني. وإذا كان العددان x وy سالبين، فإن النقطة M تقع في الربع الثالث. وإذا كان العدد x موجباً والعدد y سالباً، فإن النقطة M تقع في الربع الرابع.

جملة الإحداثيات القطبية

تتألف جملة الإحداثيات القطبية من نقطة ثابتة o، تسمى القطب، ونصف مستقيم $\overrightarrow{oE}$، منبعث من القطب o، يسمى المحور القطبي، وتعطى عليه واحدة قياس معينة، الشكل 1.6. نسمي المستوي عندئذٍ المستوي الإحداثي القطبي، واختصاراً المستوي القطبي.



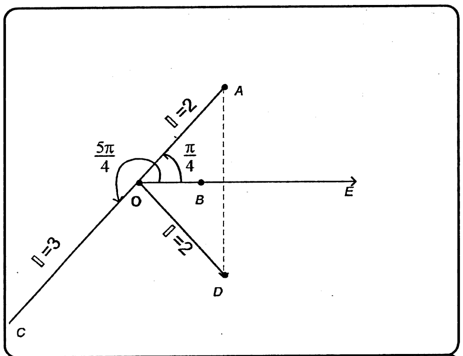
الشكل 1.6

لتكن M نقطة من المستوي القطبي. وليكن ρ طول القطعة المستقيمة oM. ولتكن φ الزاوية التي يدورها المحور القطبي $\overrightarrow{oE}$، بدءاً من محور الفواصل، حتى ينطبق على المستقيم oM، الشكل 1.6. يتعين عندئذٍ، موضع وحيد للنقطة M بمعرفة القيمتين ρ و φ. ونسمي العددين ρ و φ الإحداثيات القطبية للنقطة M، ونكتب $M(\rho,\varphi)$.
نسمي ρ نصف القطر الشعاعي و φ الزاوية القطبية.

كما هو واضح فإن العدد ρ يمكن أن يأخذ أية قيمة غير سالبة، أي $0 \le \rho < \infty$. ونعتبر عادةً، الزاوية φ هي الزاوية المحققة لـ $0 \le \varphi < 2\pi$، مع العلم أنه يمكن أن تأخذ φ قيماً أكبر من 2π، أو قيماً سالبة.

مثال: يعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 2$ و $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ النقطة A في المستوي القطبي، الشكل 1.7. ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 1$ و $\varphi = 0$ النقطة B في هذا المستوي.
ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 1$ و $\varphi = 2\pi$ نفس النقطة B.
ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 3$ و $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ النقطة C.
ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 2$ و $\varphi = \frac{7}{4}\pi$ النقطة D، وهي تناظر النقطة A بالنسبة

إلى المحور القطبي $\overrightarrow{oE}$، الشكل 1.7.



الشكل 1.7

العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية

نفرض أن المستوي منسوب لجملة إحداثيات ديكارتية، أي توجد نقطة ثابتة o ومحوران إحداثيان متعامدان ox و oy.

نفرض أن القطب o يقع في نقطة الأصل وأن المحور القطبي $\overrightarrow{oE}$ ينطبق على محور الفواصل الموجب ox. ليكن x و y الإحداثيين الديكارتيين للنقطة M، وليكن ρ و φ الإحداثيين القطبيين لنفس النقطة، الشكل 1.8.

نجد من المثلث القائم $\overset{\Delta}{oMM'}$ علاقات التحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية وبالعكس:

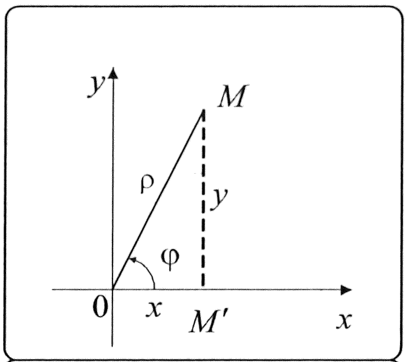
$$\{\ x = \rho \cos\varphi \quad \text{و} \quad y = \rho \sin\varphi\ \} \quad (1.6)$$

و $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتحقق φ العلاقتين:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

واضح أنه إذا كان $x^2 + y^2 = 0$، أي $x = y = 0$، فإن الزاوية φ غير معينة، أي أن زاوية القطب o غير معينة، لذا تسمى النقطة o نقطة حرجة للجملة القطبية.

ملاحظة: تُعين العلاقة $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ زاويتين في المستوي القطبي، لذا إذا أردنا استخدام هذه العلاقة لتعيين زاوية نقطة في المستوي يجب قبل ذلك تحديد في أي ربع من أرباع المستوي تقع هذه النقطة.



الشكل 1.8

مثال: أوجد الإحداثيين القطبيين للنقطة المعطاة ديكارتياً $M(2,-2)$.

الحل: إن $\rho=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. ونعين الزاوية φ من العلاقتين

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

أي أن $\varphi=\frac{7}{4}\pi$.

مثال : بين نوع المنحني المعطى قطبياً بالمعادلة $\rho=4\sin\varphi$.

الحل: من العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية، نجد

$$\sqrt{x^2+y^2}=4\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2+y^2=4y \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$$

وهي معادلة دائرة مركزها النقطة $(0,2)$ ونصف قطرها 2.

مثال : عين المعادلة القطبية للمستقيم $x=y$ (المنصف الأول).

الحل: من العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية نجد

$$\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi=\sin\varphi$$

أي $\varphi=\frac{1}{4}\pi+\pi k$ ، حيث $k\in Z$.

مجموعة الأعداد العقدية

توجد مسائل لا يمكن حلها في مجموعة الأعداد **الحقيقية** ✪ . فمثلاً، ليس للمعادلة $x^2+1=0$ حل في R ، لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه يساوي -1 .

نرمز بـ $i=\sqrt{-1}$. عندئذ يمكن التعبير عن حل المعادلة $x^2+1=0$ بالصيغة $x=\mp i$.

وهكذا ظهرت الحاجة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة جديدة تكون فيها كل المعادلات الجبرية

$$a_\circ x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0 \;;\; (a_\circ,a_1,\dots,a_n\in \mathrm{R})\cdot$$

قابلة للحل. تسمى مجموعة كهذه مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها بالرمز C .

تعريف: العدد العقدي هو العدد $z = x + iy$ ، حيث x و y أعداد حقيقية وi عنصر تخيلي يحقق الشرط $i^2 = -1$.
نسمي هذا الشكل للعدد العقدي الشكل الجبري أو الديكارتي للعدد العقدي.
نسمي العدد x القسم الحقيقي وy القسم التخيلي للعدد العقدي $z = x + iy$ ونستخدم الرموز

$$y =^{2} \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x+iy) \quad و \quad x =^{1} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+iy)$$

ولما كان كل عدد حقيقي x هو عدد عقدي قسمه التخيلي معدوم، أي $x + i(0)$، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العقدية، أي $R \subset C$.
وهكذا، فإن

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$$

تعاريف أساسية

- إذا كان القسم الحقيقي من العدد العقدي **معدوماً**، فإن العدد العقدي يسمى عدداً تخيلياً.
- **يتساوى** عددان عقديان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_1 = x_1 + iy_1$ ، إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ ، أي

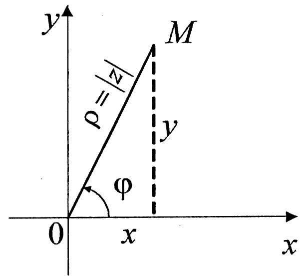
$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad و \quad y_1 = y_2$$

- **ينعدم** العدد العقدي، إذا وفقط إذا انعدم قسمه الحقيقي وقسمه التخيلي، أي

$$x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

- نسمي العدد العقدي $\bar{z} = x - iy$ **مرافقاً** للعدد العقدي $z = x + iy$.

يمثل العدد العقدي $z = x + iy$ ، هندسياً، بنقطة في المستوي الديكارتي إحداثياها x وy.
ونسمي عندئذٍ، المستوي الديكارتي مستوياً عقدياً، محور الفواصل هو المحور الحقيقي ومحور التراتيب هو المحور التخيلي.



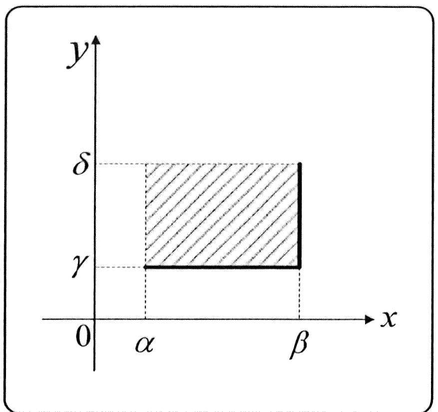
وهكذا، فكل عدد عقدي $z = x + iy$ يمثل بنقطة محددة $M(x,y)$ في المستوي العقدي، الشكل 1.9. وبالعكس، فكل نقطة من المستوي العقدي $M(x,y)$ تقابل عدداً عقدياً محدداً $z = x + iy$ ، أي هناك تقابل بين نقاط المستوي الديكارتي وعناصر المجموعة .

طويلة العدد العقدي: نسمي المسافة بين النقطة $M(x,y)$ ونقطة الأصل o طويلة (قياس) العدد العقدي $z = x + iy$ ، ونرمز لها بالرمز $|z|$. وكما هو واضح من الشكل 1.9، فإن

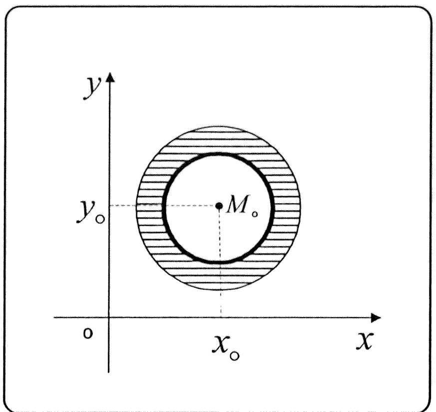
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2}$$

زاوية العدد العقدي: إذا كانت طويلة العدد العقدي غير معدومة، فإن زاوية (سعة) العدد العقدي $z = x + iy$ تعرف بأنها الزاوية φ الكائنة بين الاتجاه الموجب للمحور ox والمستقيم oM. وتُعرّف الزاوية φ بالعلاقات:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{و} \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



الشكل 1.10



الشكل 1.11

الشكل المثلثي (القطبي) للعدد العقدي

نبدل الإحداثيين الديكارتيين x وy للعدد العقدي $z = x + iy$ بالإحداثيين القطبيين المقابلين ρ وφ، فنحصل على الشكل المثلثي (القطبي) للعدد العقدي:

$$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

إن الشكل المثلثي للعدد العقدي مناسب في عمليات ضرب وقسمة الأعداد العقدية والرفع لقوة وحساب جذور العدد العقدي.

الشكل الأسي للعدد العقدي

هو الشكل الأكثر ملائمة للعدد العقدي. ونحصل على الشكل الأسي للعدد العقدي من تعويض علاقة أولر[2]

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ; \quad \varphi \in R$$

في الشكل المثلثي للعدد العقدي:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$$

حيث $\rho = |z|$ و $\varphi = \arg(z) + 2\pi k$، حيث $k \in Z$، وتقاس الزاوية φ بالراديان فقط.

$$2^n > n^2$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad ; n \geq 2$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} ; \quad n \geq 1$$

$$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

$$3 \quad divides \quad n^3 + 3n^2 + 5n$$

$$3 \quad divides \quad n^3 - n$$

$$3 \quad divides \quad n^3 + 2n$$

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad ; a \geq -1$$

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha ..... \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$$