محاضرات-2- في الرياضيات

الجامعة السورية _ كلية الصيدلة _ د. عماد فتاش

1- حساب المجاميع المنتهية(الأشكال المغلقة للمجاميع)

سوف نقوم في البدء بمراجعة بعض الحقائق الأساسية على رمز المجموع $\sum$ والدلائل المستخدمة سابقاً، كما سنستخدم رمز المجموع $\sum$ لتمثيل مجموع من الشكل:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

من خلال الكتابة:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

إنّ العديد من المسائل تحل من خلال استخدام مفهوم المجاميع. وسنقوم بعرض بعض الحقائق على المجاميع التي يمكن التحقق من صحتها بسهولة:

-1 $$\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)\,c \quad (\text{ثابت } c)$$

-2 $$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

-3 $$\sum_{i=m}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i \quad (\text{ثابت } c)$$

-4 $$\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i \quad (\text{حيث } k \text{ أي عدد صحيح})$$

-5 $$\sum_{i=m}^{n} a_i x^{i+k} = x^k \sum_{i=m}^{n} a_i x^i \quad (\text{حيث } k \text{ أي عدد صحيح})$$

إنّ هذه الحقائق مفيدة للغاية عند التعامل مع المجاميع وتحليلها إلى أشكال أبسط والتي تمكننا من إيجاد الأشكال المغلقة. لذلك من الأفضل أن ننظر في عدد من الأشكال المغلقة لبعض المجاميع المنتهية:

-1 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

-2 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

-3 $$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad (a \neq 1)$$

إنّ هذه الأشكال المغلقة مفيدة للغاية لأنها يمكن أن تستخدم في حالات مختلفة وخصوصاً عند الحاجة لعد عدد العمليات التي تتشكل من إجراء خوارزمية. إنّ الإجابة على سهولة إيجاد الأشكال المغلقة أمر ممكن في بعض الأحيان وغير ممكن في حالات أخرى. تستخدم العديد من التقنيات عند إيجاد الأشكال المغلقة وتطبق الخواص والحقائق السابقة وذلك لضبط المجاميع والبحث عن أشكال مغلقة معروفة لها، من مثل ما أوردناه من الأشكال المغلقة الأساسية. توضّح الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الأشكال المغلقة بأساليب مختلفة.

مثال (1):

لنفترض بأنّ المطلوب أن يوجد الشكل المغلق لمجموع الأعداد الطبيعية الفردية على النحو الآتي:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)$$

يمكن أن نكتب التعبير السابق باستخدام رمز المجموع $\sum$ على النحو الآتي:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)=1+3+5+\cdots+(2n+1)$$

سوف نتعامل الآن مع المجموع في الطرف الأيسر وصولاً إلى الشكل المغلق المطلوب للتعبير السابق:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)=\sum_{i=0}^{n}2i+\sum_{i=0}^{n}1=2\sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}1=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=n^2+2n+1$$
$$=(n+1)^2$$

مثال (2):

سوف نقوم بايجاد الشكل المغلق للمتسلسلة الهندسية: $\sum_{i=0}^{n}a^i$ حيث $a\neq 1$، لذلك سوف نرمز للمتسلسلة الهندسية بالرمز:

$$S_n=1+a+a^2+\cdots+a^n$$

نلاحظ أنّنا نستطيع أن نشكل الحد (المجموع) S_{n+1} بأسلوبين مختلفين في حدود من S_n:

$$S_{n+1}=1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}=(1+a+a^2+\cdots+a^n)+a^{n+1}=S_n+a^{n+1}$$

كما أنّ:

$$S_{n+1}=1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}=1+a(1+a+a^2+\cdots+a^n)=1+a\,S_n$$

بمساواة التعبيرين، نجد أنّ:

$$S_n+a^{n+1}=1+a\,S_n$$

وبما أنّ $a\neq 1$، فإنه يمكن أن نحل المعادلة السابقة من أجل S_n، فنحصل على:

$$\sum_{i=0}^{\infty}a^i=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

يمكن أن نختبر صحة الناتج من خلال الاستقراء الرياضي، أو من خلال ضرب الطرفين بالمقدار $a-1$ للحصول على المساواة.

تمارين غير محلولة

أوجد الشكل المغلق لكل من المجاميع الآتية:

1- $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n$

2- $3 + 9 + 15 + 21 + \cdots + (6n + 3)$

استخدم المجاميع والأشكال المغلقة المعروفة لتحويل كل مجموع من المجاميع الآتية إلى شكل مغلق:

3- $\sum_{i=1}^{n}(2^i + 2i - 3)$

4- $\sum_{i=1}^{n}(2i + 3)$

5- $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1)$

6- $\sum_{i=1}^{n}(2i + 2)$

2- بعض التوابع المستخدمة في التطبيقات

أولاً- تابع القيمة الصحيحة الأصغر floor:

يعرف هذا التابع $\text{floor}: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ وهو تابع يقرن العدد الحقيقي x بالعدد الصحيح الأكبر الذي يصغر أو يساوي x، وسنرمز لذلك بالرمز $\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$.

ثانياً- تابع القيمة الصحيحة الأعلى ceiling:

ويعرف هذا التابع $\text{ceiling}: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ والذي يقرن العدد الحقيقي x بالعدد الصحيح الأصغر الذي يكبر أو يساوي x، وسوف نرمز لهذا التابع بالرمز $\text{ceiling}(x) = \lceil x \rceil$.

مثال (3):

توضح الحالات الآتية هذين التعريفين:

$$\left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = 1\,; \qquad \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor = -1\,; \qquad \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0\,; \qquad \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = 0\,;$$

$$\lfloor 8 \rfloor = 8\,; \qquad \lfloor 4.1 \rfloor = 4\,; \qquad \left\lceil -\frac{1}{3} \right\rceil = 0\,; \qquad \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1\,;$$

$$\lceil -8 \rceil = -8 \qquad \lceil 8 \rceil = 8\,; \qquad \lceil 4.1 \rceil = 5\,; \qquad \lfloor -8 \rfloor = -8\,;$$

.

ثالثاً - تابع القيمة المطلقة "abs"

يُعرّف تابع القيمة المطلقة على أنه تابع من الشكل $\text{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ والمعرف على النحو الآتي:

$$\text{abs}(x) = \begin{cases} x\,; & x \geq 0 \\ -x\,; & x < 0 \end{cases}$$

يمكن أيضاً أن نكتب هذا التابع من خلال العبارة if-then-else على النحو الآتي:

$$\text{abs}(x) = \text{if } x \geq 0 \text{ then } x \text{ else } -x$$

رابعاً - تابع القاسم المشترك الأعظم gcd

إنّ القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين ليسا معاً مساويين للصفر، هو عبارة عن العدد الصحيح الأكبر الذي يقسم كلا العددين. ونرمز لهذا التابع بالرمز: $\text{gcd}(a, b)$.

خواص التابع gcd:

1- $\text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(b, a) = \text{gcd}(a, -b)$

2- إنّ $\text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(b, a - bg)$ وذلك من أجل أي عدد صحيح g.

3- إذا كان $g = \text{gcd}(a, b)$، فإنه يوجد العددين الصحيحين x و y بحيث يكون $g = ax + by$.

4- إذا كان $d \mid ab$ وكان $\text{gcd}(d, a) = 1$، فإنّ $d \mid b$.

خامساً - تابع باقي القسمة (mod):

إذا كانت a و b أعداداً صحيحة، حيث $b > 0$، إنّ $a \mid b$ إذا وجد عددان وحيدان q و r صحيحان بحيث يكون $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$.

نقول عن q إنها النسبة (quotient) و r هي باقي (remainder) قسمة a على b.

يُكتب الباقي أيضاً بالشكل: $r = a - bq$.

لنعرف الآن تابع باقي القسمة (mod): إذا كانت a و b أعداداً صحيحة و $0 < b$، فإنه يرمز لباقي قسمة a على b بالرمز: $a \bmod b$.

إذا اتفقنا على تثبيت n على أنه عدد صحيح موجب، عندئذٍ يأخذ التابع $x \bmod n$ قيمة من المجموعة $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ وهي مجموعة البواقي الممكنة التي يتم الحصول عليها من جراء قسمة أي عدد صحيح x على n.

مثال (4):

يعطي الجدول الوارد في الشكل (1) وفي كل سطر من أسطره بعض قيم $x \bmod n$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x \bmod 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x \bmod 2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \bmod 3$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
$x \bmod 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$x \bmod 5$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

الشكل (1)

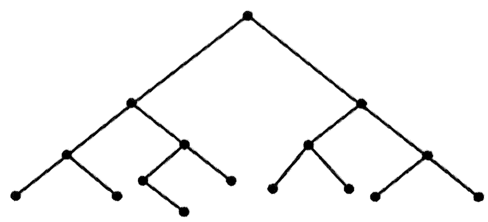
سادساً - التابع اللغاريتمي (The log function)

إنّ التابع **log** اختصار لكلمة **Logarithm** وهذا التابع يقوم بقياس حجم الأس. سوف نبدأ من العدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$. فإذا كانت x عدداً حقيقياً موجباً، فإنّ:

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

ونقول إنّ لغاريتم x بالنسبة للأساس b، يساوي y.

إنّ تابع اللغاريتم الثنائي $\log_2$ أي بالأساس 2 يستخدم استخداماً كبيراً في علوم الحاسب، لوجود العديد من الخوارزميات ثنائية الخيارات، كما أنّ الشجرة الثنائية أداة مهمة لبنى المعطيات. على سبيل المثال: نفرض أنه لدينا شجرة بحث ثنائية فيها 16 عقدة وبنيتها موضّحة بالشكل (2) كمثال على شجرة ثنائية.

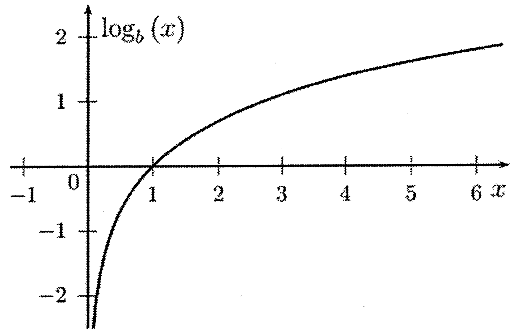


الشكل (2)

إنّ عمق الشجرة هو 4، لذا فإنّنا نحتاج كحد أعظمي إلى 5 مقارنات لإيجاد أي عنصر في الشجرة. نلاحظ في هذه الحالة أنّ $2^4 = 16$، لذلك يمكن أن نكتب في حدود من عدد العقد: $4 = \log_2 16$ يعطي الشكل (3) بعض من القيّم المختارة للتابع $\log_2$. ومن الطبيعي أن يأخذ $\log_2$ قيماً حقيقية. فمثلاً إذا كانت $8 < x < 16$ فإنّ $3 < \log_2 x < 4$. من أجل أي عدد حقيقي $b > 1$، إنّ التابع $\log_b x$ هو تابع متزايد على اعتبار أنّ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة هي مجموعة تعريفه أو ساحته وأنّ مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة قيمه، في هذه الحالة فإنّ المنحني البياني للتابع $\log_b$ في الحالة العامة موضح في الشكل (4).

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

الشكل (3)



الشكل (4)

إنّ للتابع $\log_b$ العديد من الخواص، فمن السهل أن نرى أنّ:

$$\log_b 1 = 0\,, \qquad \log_b b = 1$$

تسمح الخواص الأساسية للتابع $\log_b$ القيام بحساب التعابير اللغاريتمية.

الخواص الأساسية للتابع log:

1- $\log_b(b^x) = x$

2- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

3- $\log_b(x^y) = y \log_b x$

4- $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$

5- قاعدة تغيير الأساس (change of base): $(\log_a x) = (\log_a b)(\log_b x)$