الجامعة السورية الدولية الخاصة

مقرر الرياضيات السنة الأولى د. عماد فتاش

محاضرات حول المتتاليات والمتسلسلات العددية

<u>المتتاليات وتقاربها</u>

يرمز لها من خلال $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

أو

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

يدعى a_n بالحد العام للمتتالية و n بدليل الحد العام.

<u>أمثلة على المتتاليات العددية :</u>

. متتالية الأعداد الصحيحة الموجبة : $\{1,2,3,4,5,6,\dots\}$.

. القوة الصحيحة الموجبة للمقدار $-\frac{1}{2}$.

$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots\right\}$.

<u>توضيح:</u>

$$a_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2} \text{ ، } a_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \text{ ، } a_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$$

. يمكن إعطاء صيغة حساب عناصر الحدالعام a_n من أجل الحدود
$\{a_1, a_2, \dots, a_n, ..\}$ ومن ثم نستخدم القاعدة من أجل الدلالة على كيفية حساب باقي الحدود (اللانهائية العدد).

أمثلة :

$1 - \{n\} = \{1,2,3,4,..\}_{\#}$

$2 - \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}_{\#}$

$3 - \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}_{\#}$

$4 - \{(-1)^{n-1}\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}_{\#}$

$5 - \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \dots\right\}_{\#}$

$6 - \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \left\{2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4 \dots\right\}_{\#}$

$7 - \left\{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\right\} = \left\{0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0 \dots\right\}_{\#}$

$$8 - \begin{cases} a_{1=1 \text{ ، } a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}} \\ \{a_n\} = \left\{1, \sqrt{7}, \sqrt{6+\sqrt{7}}, \dots\right\}_{\#} \end{cases}$$

$$9 - \begin{cases} a_1 = 1 \text{ ، } a_2 = 1 \text{ ، } a_{n+2} = a_n + a_{n+1} ; (n = 1,2,\dots) \\ \textit{Fibonacci sequence} \\ \{a_n\} = \{1,1,2,3,5,8,13,21,\dots\} \qquad \# \end{cases}$$

$10 - \{\sqrt{n}\} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\right\}_{\#}$

$11 - \{(-1)^{n+1}/n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1}/n_1, \dots\right\}_{\#}$

$12-\left\{\frac{n-1}{n}\right\}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n-1}{n},\ldots\right\}_{\#}$

$13-\{(-1)^{n-1}\}=\{1,-1,1,-1,\ldots\}$

ملاحظة: المتتالية $\{n\}=\{1,2,3,\ldots\}$. موجبة ومتزايدة ومحدودة من الأدنى والحد الأدني هو **1**، (أو عدد أصغر من **1**)، وهذه المتتالية غير محدودة من الأعلى.

المتتالية المتقاربة أوالمتباعدة :

لا بد من توضيح الآتي: إن أي متتالية لا بد أن تكون **متقاربة إلى نهاية محدودة L أو أن تكون متباعدة،** أي أنه عندما تكون $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ موجودة أو أن تكون $\lim_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة.

. إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ نقول بأن المتتالية متباعدة إلى ∞.

. إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ نقول بأن المتتالية متباعدة إلى $-\infty$.

. إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة (ليست ∞ أو $-\infty$) نقول بأن المتتالية متباعدة.

خواص نهايات المتتاليات :

لتكن $\{a_n\},\{b_n\}$ متتاليات متقاربة،عندئذ:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n)$.
2. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n$.
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$.
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad (\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$.
5. إذا كانت $a_n \leq b_n$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

6 . إذا كانت $a_n \leq b_n \leq c_n$ وكانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

عندئذ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

أمثلة :

1 . المتتالية $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ تتقارب إلى 1 لأن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2 . $\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,\ldots\}$ متناوبة ونهايتها غير موجودة، فهي متباعدة.

3 . $\{(-1)^n n\} = \{-1,2,-3,\ldots\}$ متباعدة

أمثلة إضافية: أوجد نهايات كل من المتتاليات

4 . $\left\{\frac{2n^n-n-1}{5n^2n-3}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n-n-1}{5n^2n-3}=\frac{2}{5}$$

وهي متتالية متقاربة ونهايتها $\frac{2}{5}$.

5 . $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$. $|\cos n| \leq 1$ أياً كان n.

كما أنه لدينا : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ من أجل $n \geq 1$.

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$، والمتتالية متقاربة إلى الصفر.

6 . $\left\{\sqrt{n^2+2n}-n\right\}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

والمتتالية تتقارب إلى1.

7 -هل المتتالية $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ متقاربة أم متباعدة.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e = e$ وهي متقاربة إلى e.

8 -أوجد $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n}+1^n\right] = [0+0+1]$$
$$= 1$$

المتتالية متقاربة من1.

المتسلسلات اللانهائية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots$$

مثال (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1+a+a^2+a^3+\cdots$$