$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

متتالية المجاميع الجزئية :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots\dots$$

$$\dots\dots$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

<u>المتسلسلة الهندسية :</u>

وهي متسلسلة من الشكل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

وحدها العام $a_n = ar^{n-1}$ و a هو الحد الأول ، ويدعى r بالنسبة المشتركة ويمثل قيمة النسبة للحد n+1 إلى الحد n وذلك من أجل $n \geq 1$ ونكتب :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r \qquad ; \; n = 1 ,2 ,3, \dots \dots \dots$$

إن المجموع الجزئي النوني (n^{th}) للمتسلسلة الهندسية يمكن أن يحسب على النحو الآتي :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

ويتم الحصول على المعادلة الثانية من خلال ضرب طرفي المعادلة الأولى بـ r.

وبطرح هاتين المعادلتين، نحصل :

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

- إذا كانت$1 \neq r$ يمكن أن نقسّم الطرفين على 1−r ونحصل على S_n.
- إذا كان $1 = r$ فإن المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ هو:

$$S_n = a + a + a + a + \cdots + a = na$$

- إذا كان $1 \neq r$، فإن لـ S_n الشكل :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

- بفرض أن $a = 1$ و $1>$|r|، بالتالي$\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ لذلك:

$$\lim_{n \to \infty} \text{Sn} = \frac{1}{1 - r}$$

مثال (2) :

بأخذ التابع $\frac{1}{1-x}$ لتمثيل مجموع المتسلسلة الهندسية، نكتب :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots$$

وذلك من أجل $-1<x<+1$

مثال (3) :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

وهنا نجد بأن $a = 1$ و $r = \frac{1}{2}$ وبما أن $r < 1$، فإن هذه المتسلسلة متقاربة.

مثال (4) :

$$\pi-e+\frac{e^{2}}{\pi}-\frac{e^{3}}{\pi^{2}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}=$$

حيث :

$$r=-\frac{e}{\pi} \quad , \quad a=\pi$$

$$= \frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)} = \frac{\pi^2}{\pi+e}$$

والمتسلسلة متقاربة لأن :

$$\left|-\frac{e}{\pi}\right| < 1$$

مثال (5) :

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 3^{1/2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

ونلاحظ بأن هذه المتسلسلة متباعدة إلى∞،ذلك لأن $0 < 1 = a$ و $1 < \sqrt{2} = r$

مثال (6) :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

وهي متسلسلة متباعدة لأن $r = -1$.

المتسلسلة التلسكوبية والمتسلسلة التوافقية :

مثال (7) :

بين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها.

نلاحظ بأن :

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

بالتالي فإن الحد النوني للمجاميع الجزئية سوف يكون له الشكل :

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n-1)}+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

لذلك فإن :

$$\lim_{n\to\infty} Sn=1$$

إن المتسلسلة تتقارب إلى 1 وهو يمثل مجموعها، ونكتب :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

مثال (8) :