$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{、} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{、} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

الحساب التفاضلي للدوال التابعة لمتحول حقيقي واحد

الحساب التفاضلي
للدوال التابعة لمتغير حقيقي واحد

مفهوم المشتق

تعريف: لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة على جوارٍ $u_\delta(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$، وليكن Δx تغيراً للمتغير x عند النقطة $x_\circ$، بحيث تبقى النقطة $x_\circ + \Delta x$ ضمن الجوار $u_\delta(x_\circ)$.

يكون عندئذٍ، تغير الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_\circ$:

$$\Delta f(x_\circ) = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_\circ)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، فإنها تسمى مشتق الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x_\circ$، ونرمز لها بأحد الرموز

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_\circ} ، \frac{df(x_\circ)}{dx} ، y'(x_\circ) ، f'(x_\circ)$$

ونرمز لمشتق الدالة $y = f(x)$، عند نقطة اختيارية x، بأحد الرموز

$$\frac{dy}{dx} ، \frac{df}{dx} ، y' ، f'$$

إذا كان مشتق الدالة $f(x)$ موجوداً عند كل نقطة x من نقاط المجموعة $X \subseteq D(f)$، أي أن للمشتق $f'(x)$ قيمة محددة عند كل قيمة للمتغير x، فإن المشتق $f'(x)$ هو دالة في x، معرفة على المجموعة X.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_\circ)}{\Delta x}=-\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_\circ)}{\Delta x}=+\infty$$

عند نقطةٍ ما $x_\circ$، فإننا نقول إن للدالة $f(x)$ مشتقاً لا نهائياً، غير محدد، عند النقطة $x_\circ$. ونعني، لاحقاً، بعبارة "للدالة $f(x)$ مشتق" أن هذا المشتق موجود ومحدود، ما لم نذكر خلاف ذلك.

مثال: أوجد مشتق الدالة الثابتة $f(x)=C$ عند نقطة اختيارية x.

الحل: ليكن Δx تغيراً للمتغير x. عندئذٍ، فإن تغير الدالة $f(x)$:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$$

وعليه، فإن المشتق هو

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

أي أن: $f'(x)=c'=0$.

مثال: أوجد مشتق الدالة $f(x)=x^2$ عند نقطة اختيارية x.

الحل: ليكن Δx تغيراً للمتغير x. يكون عندئذٍ، تغير الدالة $f(x)$

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

وعليه، فإن المشتق هو

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\,\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[2x+\Delta x\right]=2x$$

أي أن: $f'(x)=(x^2)'=2x$.

المعنى الفيزيائي للمشتق

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على جوار $u_\delta(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$ وليكن Δx تغيراً للمتغير x عند النقطة $x_\circ$، بحيث تبقى النقطة $x_\circ+\Delta x$ داخل الجوار $u_\delta(x_\circ)$.

يكون عندئذٍ، تغير الدالة $f(x)$:

$$\Delta f(x_\circ)=f(x_\circ+\Delta x)-f(x)$$

ويكون متوسط السرعة لتغير الدالة $f(x)$:

$$\nu_{cp}=\frac{\Delta f(x_\circ)}{\Delta x}$$

أما السرعة اللحظية لهذا التغير:

$$\nu=\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta f(x_\circ)}{\Delta x}=f'(x_\circ)$$

وهو المعنى الفيزيائي للمشتق أي أن المشتق هو النموذج الرياضي للسرعة الآنية لعملية ما ممثلة بالدالة $f(x)$. ويمكن الحصول على نماذج عديدة لسرعة جريان عملية ما.

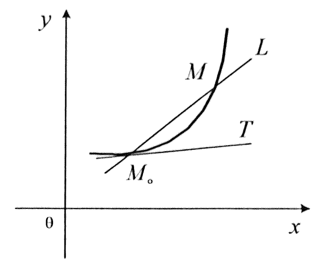
المعنى الهندسي للمشتق

ندرس مسألة تعيين مماس لمنحنٍ عند نقطة منه.

ليكن L قوساً منحنياً مستوياً، ولتكن $M_\circ$ نقطة من هذا المنحني و $M_\circ M$ قاطعاً للمنحني، الشكل 5.1.

عندما تتحرك النقطة M على المنحني L حتى تصل للنقطة $M_\circ$، فإن المستقيم القاطع يتحرك حول النقطة $M_\circ$ حتى يصل إلى وضع نهائي $M_\circ T$.

نسمي المستقيم $M_\circ T$ المستقيم المماس للمنحني L عند النقطة $M_\circ$ والذي هو الوضع النهائي للمستقيم القاطع $M_\circ T$.



.1

تفاضل دالة

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على جوارٍ $u_\delta(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$.

تعريف: نقول إن الدالة $f(x)$ قابلة للمفاضلة (فضولة) عند النقطة $x_\circ$، إذا أمكن كتابة تغيرها عند هذه النقطة كما يلي:

$$\Delta f(x_\circ) = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

حيث A عدد حقيقي ما و $\alpha(\Delta x)$ لامتناه في الصغر من مرتبة أعلى من مرتبة Δx، عندما تسعى Δx إلى الصفر.

وهكذا، فإن قابلية المفاضلة لدالة عند نقطة $x_\circ$، تعني أن تغير الدالة هو دالة خطية في Δx، مع فارق بسيط هو لا متناه في الصغر من مرتبة أعلى من مرتبة تغير المتغير Δx.

فمثلاً، تفاضل الدالة $y = x^2$ عند النقطة $x_\circ$، من أجل تغير ما Δx للمتغير x، هو

$$dy = 2x_\circ dx$$

تفاضل الدالة المركبة

عرّفنا سابقاً أن تفاضل الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x_\circ$ هو حاصل جداء مشتق الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_\circ$ وتفاضل المتغير المستقل x ، أي $dy = f'(x)\ dx$.

وعليه، إذا كانت $y = f(u(x))$ دالة مركبة، فإن $y' = f'_u(u) \cdot u'(x)$. ومنه، فإن

$$dy = f'_u(u) \cdot u'(x)\ dx$$

ولما كان $du = u'(x)\,dx$ ، فإن تفاضل الدالة المركبة هو

$$dy = f'(u)\,du$$

أي أن تفاضل الدالة يساوي، دائماً، حاصل جداء مشتق الدالة وتفاضل المتغير.
ينتج من هذه الخاصة، أن

$$f'(x_\circ) = \frac{dy}{dx}$$

أي أن مشتق دالة عند نقطة، يساوي حاصل قسمة تفاضل الدالة، عند هذه النقطة، على تفاضل المتغير، بغض النظر عن كون هذه الدالة تابعة للمتغير x أو كانت دالة مركبة.

اشتقاق وتفاضل الدوال الابتدائية الأساسية

1. مشتق وتفاضل الدالة $y = \log_\alpha x$ (حيث $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$)

$$d(\log_\alpha x) = \frac{dx}{x \ln \alpha} \quad \text{و} \quad (\log_\alpha x)' = \frac{1}{x \ln \alpha}$$

إذا كانت الدالة y دالة لوغاريتمية مركبة : $y = \log_\alpha u(x)$ ، فإن

2. مشتق وتفاضل دالة القوة: $y = [u(x)]^\alpha$ ، حيث $\alpha \in$ ✡

$$dy = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot du \quad \text{و} \quad y' = a^{u(x)} u'(x) \cdot \ln a$$

وفي الحالة الخاصة $a = e$ أي $y = e^{u(x)}$ ، يكون

$$dy = e^{u(x)} \cdot du \quad \text{و} \quad y' = e^{u(x)} u'(x)$$

3. مشتق وتفاضل الدوال المثلثية:

جدول المشتقات الشهيرة

لتكن u دالة في x :

الدالة	المشتق	الدالة	المشتق
$y = c$	$y' = 0$	$y = chu$	$y' = u' shu$
$y = u^{\alpha} ; \alpha \in \mathbb{R}$	$y' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$	$y = thu$	$y' = \dfrac{u'}{ch^2 u}$
$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$	$y = cthu$	$y' = \dfrac{-u'}{sh^2 u}$
$y = e^u$	$y' = e^u u'$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$	$y = \arccos u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	$y = \mathrm{arc}\cot u$	$y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$
$y = \cos u$	$y' = u' \sin u$	$y = ar\, shu$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$
$y = \tan u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$y = ar\, chu$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \cot u$	$y' = \dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$y = ar\, thu$	$y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$
$y = shu$	$y' = u' chu$	$y = ar\, cthu$	$y' = \dfrac{u'}{1 - u^2}$

مثال: أوجد مشتق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ \end{cases}$$

الحل: نوجد مشتق f عندما يكون $x \neq 0$. من قاعدة مشتق جداء دالتين

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

المشتق والتفاضل اللوغاريتمي

تساعد قاعدة اشتقاق الدالة المركبة واشتقاق اللوغاريتم بتبسيط مسألة إيجاد المشتق. فإذا كانت $y = f(x)$ دالة فضولة على المجال $[a;b]$، وكان $f(x) > 0$ في هذا المجال، فإن

$$\ln y = \ln f(x)$$

ويكون عندئذٍ،

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = [\ln f(x)]' \cdot y$$

مثال : احسب مشتق الداله $y_1 = x^x$.

الحل: نأخذ لوغاريتم ، ثم نشتق

$$\ln y_1 = x\ln x \quad \Rightarrow \quad y_1' = x^x(\ln x + 1)$$

المشتقات من مراتب عليا

إن مشتق الدالة $y = f(x)$ هو دالة أيضاً. نسمي المشتق $f'(x)$ المشتق من المرتبة الأولى للدالة $f(x)$. إذا كانت الدالة $f'(x)$ فضولة ، فإن مشتقها $f''(x)$ يسمى المشتق من المرتبة الثانية (المشتق الثاني) للدالة $f(x)$ ونرمز له بـ y'' أو $\frac{d^2y}{dx^2}$. أي $y'' = (y')'$

ونعرّف بأسلوبٍ مماثل، المشتق من المرتبة الثالثة والرابعة... عليا.