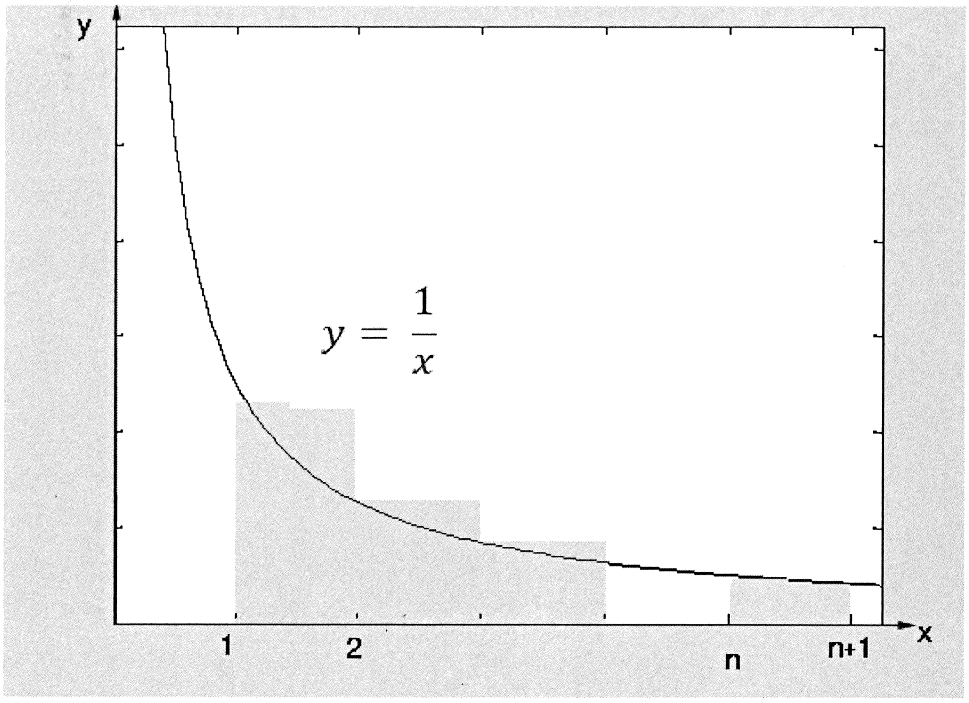
المتسلسلة التوافقية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

إن الحد النوني للمجاميع الجزئية للمتسلسلة التوافقية، هو :

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$



مثال (9) : أوجد مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$$

إن هذه المتسلسلة هي مجموع لمتسلسلتين هندسيتين :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/3}{1-2/3} = 4$$

بالتالي واستناداً إلى ماسبق، فإن للمتسلسلة المعطاة المجموع :

$$\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

مثال (10) :المتسلسلة التوافقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

إذا كانت :

$p < 1$ المتسلسلة متباعدة.

<u>$p > 1$ المتسلسلة متقاربة.</u>

$p = 1$ المتسلسلة متباعدة.

تمرين : أدرس فيما إذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة ؟!

مثال : أوجد المشتق النوني للدالة $y=\ln(1+x)$
الحل: نشتق بالتتالي:

$$y'=\frac{1}{1+x}\ ,\ y''=\frac{-1}{(1+x)^2}\ \ ,\ \ y'''=\frac{1.2}{(1+x)^3}\ ,\ y^{(4)}=\frac{-1.2.3}{(1+x)^4}$$

وبالاستقراء نجد:

$$y^{(n)}=\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

نسمي هذه الصيغة صيغة ليبنتز ونبر هن صحتها بالاستقراء الرياضي.

اشتقاق الدالة الضمنية

لتكن $y=f(x)$ دالة معطاة ضمنياً بالمعادلة $F(x,y)=0$ ، ولتكن الدالة $f(x)$ فضولة على المجال $[a;b]$. نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على معادلة جديدة تحوي x و y و y'_x. نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ y'_x ، فنحصل على مشتق الدالة الضمنية معطى بدلالة x و y.

$$F'(x,y)=0\ \Rightarrow\ F'_x+F'_y\cdot y'_x=0\ \Rightarrow\ y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

ولإيجاد المشتق من المرتبة الثانية للدالة الضمنية $y=f(x)$ نشتق y'_x بالنسبة لـx ، فيكون المشتق y'' يحوي x و y و y'_x نعوض فيه قيمة المشتق y'_x ، فنحصل على المشتق من المرتبة الثانية y'' الذي يحوي x و y فقط. ونتابع بهذا الأسلوب، لإيجاد المشتقات من مراتب عليا.

مثال : أوجد المشتق من المرتبة الثالثة للدالة $y=f(x)$ المعطاة ضمنياً بالمعادلة $x^2+y^2=a^2$.
الحل: نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x :

$$2x+2y\,y'=0\qquad\Rightarrow\qquad y'_x=-\frac{x}{y}$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ x :

$$y''=\frac{-y+xy'}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{a^2}{y^3}$$

نشتق y'' بالنسبة لـ x :

$$y''' = \frac{3a^2 y'}{y^4} = \frac{-3a^2 x}{y^5}$$

مثال : احسب النهاية

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$$

الحل: نعوض في الكسر $x = 0$، فنحصل على حالة عدم تعيين من النمط $\left(\frac{0}{0}\right)$. لإزالتها، نطبق قاعدة لوبيتال ثلاث مرات متتالية ، حيث إن الدالتين $f(x) = e^x - e^x - 2x$ و $g(x) = x^3$ تحققان شروط المبرهنة 5.9:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال : احسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 5x}{\cot x}$.

الحل: نعوض في الكسر $x = 0$، فنحصل على حالة عدم تعيين من النمط $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. ولما كانت الدالتان $f(x) = \ln 5x$ و $g(x) = \cot x$ تحققان شروط المبرهنة 5.9، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 5x}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{\left(-1/\sin^2 x\right)} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} =$$

$$= -\left(\lim_{x\to 0^+} \sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\right) = -0 \cdot 1 = 0$$