الرياضيات

**د. عماد فتاش**

## المحاضرة الأولى ( ١ وطب صيدلة )

### التكاملات المعتلة (المعممة-الشاذة )

### <u>التكاملات المعتلة من النوع الأول: مجال المكاملة غير محدود</u>

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a<b<+\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ -\infty<a<b}} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx \quad ; \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ -\infty<a<c}} \int_a^c f(x)dx + \lim_{\substack{b\to+\infty \\ c<b<+\infty}} \int_c^b f(x)dx$$

**مثال 1 : ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $\alpha$، تقارب وتباعد التكامل المعتل** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

**الحل: التكامل معتل، لأن حده الأعلى غير محدود.**

**نحسب التكامل المحدد** $\phi(b) = \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}}$، **حيث** $1 < b < \infty$:

$$\phi(b) = \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \left[\ln|x|\right]_1^b = \ln b & ; \quad \alpha = 1 \\ \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \dfrac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) & ; \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

**نحسب، الآن النهاية** $\lim_{b\to\infty} \phi(b)$ :

1. $\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{b\to\infty} \phi(b) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$

2. $\alpha \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{b\to\infty} \phi(b) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha} - 1\right] = \begin{cases} \infty & ; \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & ; \quad \alpha > 1 \end{cases}$

**وعليه، فإن التكامل المعتل المعطى متقارب فقط في الحالة $\alpha > 1$، وقيمته:**

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1} \quad ; \quad \alpha > 1$$

مثال 2 : ادرس تقارب وتباعد التكامل $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ .

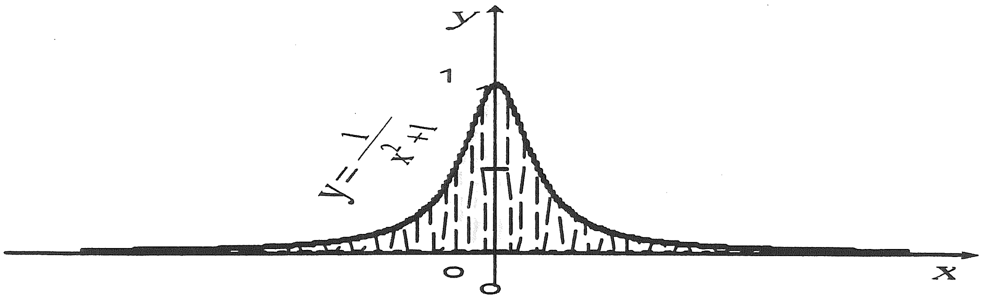
الحل: التكامل معتل، لأن حديه الأدنى والأعلى غير محدودين. نجزئ هذا التكامل لتكاملين معتلين:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ -\infty<a<0}} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{\substack{b \to +\infty \\ 0<b<\infty}} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \to -\infty} (\arctan x)\Big|_a^0 + \lim_{b \to \infty} (\arctan x)\Big|_0^b =$$

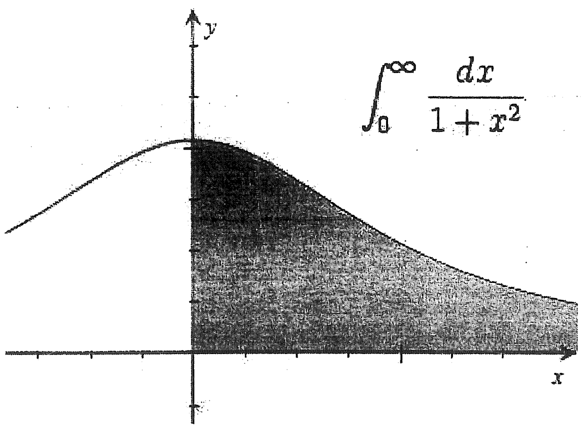
$$= \lim_{a \to -\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b \to \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi$$

أي أن التكامل المعتل متقارب وقيمته $\pi$. ويمثل هذا التكامل، مساحة الشكل المظلل في الشكل.




## توضيح:

التكامل $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$




$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to \infty} \arctan b - \arctan 0 = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

مثال 3: ادرس تقارب وتباعد التكامل $\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx$ .

الحل: التكامل معتل، لأن حده الأدنى غير محدود. نحسب النهاية:

$$\int_{-\infty}^{0}\cos x dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ -\infty<a<0}}\int_{a}^{0}\cos x dx=\lim_{a\to-\infty}(\sin x)\Big|_a^0=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(\sin 0-\sin a)=-\lim_{a\to-\infty}\sin a$$

إن هذه النهاية غير موجودة. وعليه، فإن التكامل المعتل المعطى متباعد.

ملاحظة: إذا كان التكامل المعتل متقارباً، فإنه يمكن تطبيق صيغة نيوتن ـ ليبنتز:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^{\infty}=F(\infty)-F(a)\quad;\quad F(\infty)=\lim_{b\to\infty}F(b)$$

فمثلاً، إذا علمنا أن التكامل المعتل $\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx$ متقارب، فإننا نستطيع أن نكتب مباشرة:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=-e^{-\infty}+1=1$$

مثال 4 : عين قيمة الثابت الحقيقي $\alpha$، حتى يتقارب التكامل

$$A=\int_{2}^{\infty}\left(\frac{\alpha x}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx \ .$$

الحل: التكامل معتل، لأن حده الأعلى غير محدود. نحسب النهاية:

$$A=\lim_{\substack{b\to\infty\\ 2<b<\infty}}\int_{2}^{b}\left(\frac{\alpha x}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x^2+1)^{\alpha}}{(2x+1)}\right|\right]_2^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{(b^2+1)^{\alpha}}{(2b+1)}\right|-\ln\frac{5^{\alpha}}{5}\right]$$

نلاحظ أن اللوغاريتم يسعى إلى نهاية محددة، عندما يسعى $b$ إلى اللانهاية، فقط عندما تتساوى درجة البسط ودرجة المقام، ويكون ذلك عندما يكون $\alpha=\frac{1}{2}$. وعليه، فإن:

$$A=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2}+\ln\sqrt{5}\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$