## تمارين على التكاملات المعتلة

مثال ج ـ ادرس تقارب التكامل الآتي $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^{R} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{x^{1/2}}{1/2} = \lim_{R\to\infty}(2R^{1/2}-2) = \infty$$

التكامل متباعد.

مثال ح :

التمرين الثاني

أثبت أن

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(\lambda t)dt = \frac{a}{a^2+\lambda^2}$$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin(\lambda t)dt = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}$$

حيث $a$ عدد حقيقي موجب.

الحل:

بالمكاملة بالتجزئة نجد أن: $I = \left[-\frac{e^{-at}}{a}\cos(\lambda t)\right]_0^{+\infty} - \frac{\lambda}{a}\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin(\lambda t)dt$ و منه

$$I = \frac{1}{a} - \frac{\lambda}{a}J \qquad (6.0)$$

و بنفس الطريقة نجد أن

$$J = \frac{\lambda}{a}I \qquad (7.0)$$

و بالحل المشترك للمعادلتين (6.0) و (7.0) نجد أن $I = \frac{a}{a^2+\lambda^2}; J = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}$.

مثال 7- ادرس تقارب التكامل الآتي $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

نكامل بالتجزئة

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} xe^{-x}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^R - \int_0^R e^{-x}dx\right) =$$
$$\lim_{R\to\infty}\left[\left(-Re^{-R}+0\right)-\left[e^{-x}\right]_0^R\right] = 0-0+1=1$$

التكامل متقارب.

مثال 8- ادرس تقارب التكامل الآتي $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x-1)^2}dx$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0\frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{R\to-\infty}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_R^0 = 1$$

التكامل متقارب.

مثال 9: ادرس تقارب التكامل الآتي $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = +\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$$

ندرس التكامل الأول

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = -1/2$$

ندرس التكامل الثاني

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = 1/2$$

اذاً التكامل المعطى متقارب وقيمته 0 .